

Лекция 8

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА В МНОГОУГОЛЬНИКЕ

1. Постановка задачи

Пусть Ω — полигональная область на плоскости Oxy , $\bar{\Omega}$ — ее замыкание, а $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ — ее граница. Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся частей $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ таких, что

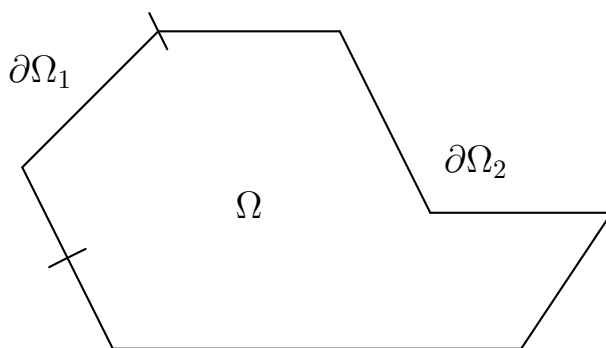


Рис. 1

$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. В области Ω зададим уравнение Пуассона

$$-\Delta u := -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

и поставим для него смешанную задачу путем задания на $\partial\Omega$ граничных

условий вида

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_2, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — направление внешней (по отношению к Ω) нормали к $\partial\Omega_2$.

Дадим вариационную формулировку задачи (1)-(3). Для этого умножим уравнение (1) на функцию $v(x, y)$, равную нулю на $\partial\Omega_1$, и проинтегрируем результат по Ω . Используя для преобразования левой части полученного тождества первую формулу Грина и принимая во внимание граничное условие (3), будем иметь

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx dy &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, ds = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy =: \int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla u) dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\nabla v = [\partial v / \partial x \quad \partial v / \partial y]^T$ — градиент $v(x, y)$. Обозначим

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla u) dx dy, \quad (5)$$

$$l(v) := \int_{\Omega} f v dx dy \quad (6)$$

и введем пространство Соболева

$$H^1(\Omega) := \left\{ v(x, y) \mid \|v\|_1^2 := \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx dy < \infty \right\}.$$

Тогда, если

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v(x, y) \in H^1(\Omega) \mid v(x, y)|_{\partial\Omega_1} = 0 \right\},$$

то вариационная формулировка задачи (1)-(3) такова: найти

$$u(x, y) \in \tilde{H}^1(\Omega) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (7)$$

2. Конечноэлементная формулировка

Поставим задачу об отыскании приближенного решения задачи (7). Для этого произведем сначала *триангуляцию* $\bar{\Omega}$.

Пусть $0 < h < 1$ есть параметр дискретизации и для каждого такого h пусть π^h обозначает разбиение $\bar{\Omega}$ на непересекающиеся треугольники $e^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N(h)$ такие, что

1°. Общие стороны любых двух соседних треугольников совпадают.

2°. Точки смены типа граничного условия (т.е. принадлежащие $\partial\bar{\Omega}_1 \cap \partial\bar{\Omega}_2$) являются вершинами треугольников.

3°. $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N(h)} e^{(i)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу свойств 1°, 2° и 3° триангуляция π^h не может содержать фрагменты, изображенные на рис. 2а), 2б) и 2в), соответственно.

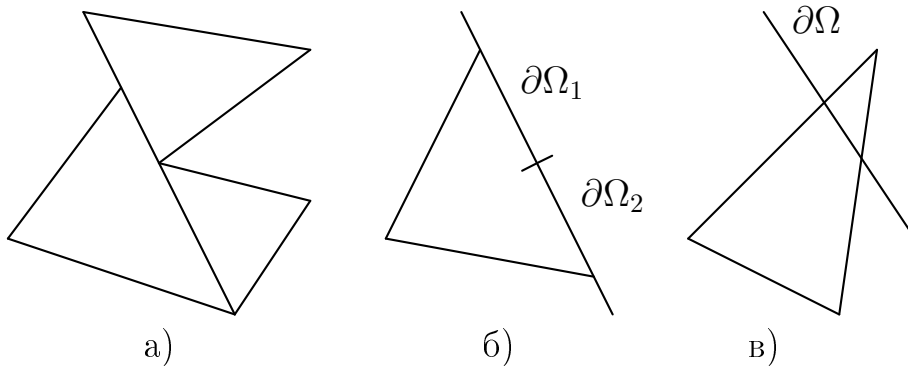


Рис. 2

Возможная триангуляция области Ω изображена на рис. 3.

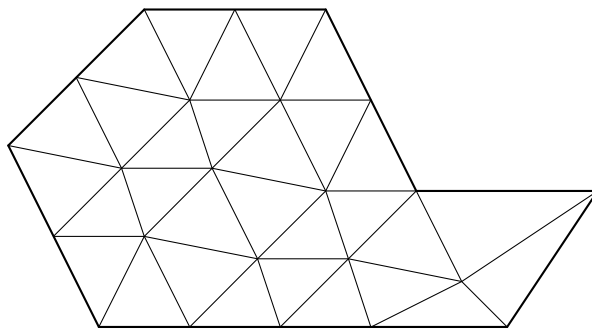


Рис. 3

Теперь построим конечномерное подпространство пространства $\tilde{H}^1(\Omega)$, согласованное с триангуляцией π^h . Пусть

$$S_1^h := \left\{ v^h(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \mid v^h(x, y)|_{e^{(i)}} \in P_1(e^{(i)}), \quad e^{(i)} \in \pi^h \right\}$$

есть пространство кусочно-линейных, линейных на каждом элементе $e^{(i)} \in \pi^h$, непрерывных функций, а

$$\tilde{S}_1^h := \{v^h(x, y) \in S_1^h \mid v^h|_{\partial\Omega_1} = 0\}$$

— его подпространство. Очевидно, что $\tilde{S}_1^h \subset \tilde{H}^1(\Omega)$ и не пусто. Пусть $\dim \tilde{S}_1^h = n$. Назовем приближенным решением задачи (7) такую функцию

$$u^h(x, y) \in \tilde{S}_1^h \quad : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_1^h. \quad (8)$$

Очевидно, что линейная на треугольнике функция однозначно определяется заданием ее значений в вершинах, которые мы будем называть узлами и которые предполагаются упорядоченными. Каждая функция $v^h(x, y) \in \tilde{S}_1^h$ может быть однозначно представлена в виде

$$v^h(x, y) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x, y),$$

где v_i — ее значение в i -ом узле, а $\varphi_i(x, y) \in \tilde{S}_1^h$ — базисная функция (см. рис. 4), равная единице в i -ом узле и нулю во всех других узлах. Полагая теперь в (8) $u^h = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(x, y)$, а $v^h = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$, полу-

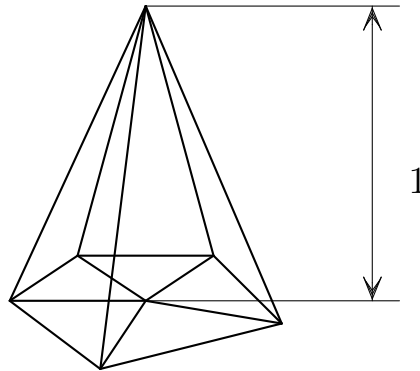


Рис. 4

чим следующую систему линейных алгебраических уравнений для значений приближенного решения в узлах :

$$\sum_{j=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = l(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Вычислим коэффициенты $a(\varphi_i, \varphi_j)$ системы (9) и компоненты ее правой части $l(\varphi_i)$. Сделаем это при помощи поэлементных вычислений, но прежде введем так называемые барицентрические координаты.

3. Бариеентрические координаты

Пусть e — треугольник, расположенный на плоскости Oxy , вершины которого пронумерованы числами 1, 2 и 3 в направлении, обратном ходу часовой стрелки. Координаты этих вершин суть (x_i, y_i) , $i=1, 2, 3$. Пусть O — точка внутри e и (x, y) — ее координаты. Соединим отрезками прямых точку O с вершинами треугольника e . В результате треугольник e будет разбит на три треугольника e_1, e_2 и e_3 , где e_i — тот из них, одна из сторон которого является стороной e , расположенной напротив i -ой вершины. Описанная ситуация изображена на рис. 5.

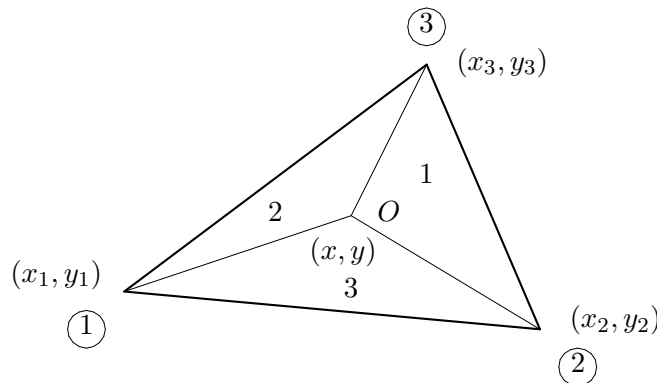


Рис. 5

Пусть S и S_i — площади треугольников e и e_i соответственно.

Определение 1. Величины $\zeta_i = S_i/S$, $i = 1, 2, 3$ называются *барицентрическими координатами* в треугольнике e .

Очевидно, что положение каждой точки в треугольнике e однозначно определяется ее барицентрическими координатами.

Барицентрические координаты линейно зависимы и обладают следующими очевидными свойствами :

$$\sum_{i=1}^3 \zeta_i = 1, \quad \zeta_i(x_i, y_i) = 1, \quad \zeta_i(x_j, y_j) = 0, \quad i \neq j. \quad (10)$$

Установим связь между барицентрическими и декартовыми координатами. Из аналитической геометрии известно, что

$$S = \frac{1}{2!} \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому, например,

$$\zeta_1 = \det \begin{bmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Но эта формула и ей аналогичные для ζ_2 и ζ_3 дают представление решения алгебраической системы

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

при помощи формул Крамера. Искомая связь установлена. Соотношение (12) иногда принимается за определение барицентрических координат.

Преобразуем соотношение (11), выражающее барицентрическую координату ζ_1 через декартовы координаты. Раскладывая детерминант из числителя (11) по элементам первого столбца, найдем, что

$$S_1 = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{2},$$

где

$$a_1 = y_2 - y_3, \quad b_1 = x_3 - x_2, \quad c_1 = x_2y_3 - x_3y_2. \quad (13)$$

Тем самым,

$$\zeta_i = \frac{a_ix + b_iy + c_i}{2S}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (14)$$

а выражение для коэффициентов a_i , b_i и c_i через координаты вершин e получаются из (13) путем круговой перестановки индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Именно

$$\begin{aligned} a_2 &= y_3 - y_1, & b_2 &= x_1 - x_3, & c_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, \\ a_3 &= y_1 - y_2, & b_3 &= x_2 - x_1, & c_3 &= x_1y_2 - x_2y_1. \end{aligned} \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (13), (15) следует, что

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 b_i = 0. \quad (16)$$

Имеет место следующая формула для интеграла по e барицентрического одночлена

$$\int_e \zeta_1^m \zeta_2^n \zeta_3^p dx dy = S \frac{m!n!p!2!}{(m+n+p+2)!}. \quad (17)$$

4. Матрица жесткости и вектор нагрузки треугольного элемента

Пусть $e^{(i)}$ - произвольный треугольник триангуляции π^h . Присвоим его вершинам (являющимся узлами конечноэлементной сетки) новые номера 1, 2 и 3 и будем называть эту нумерацию локальной. Пусть, как обычно, нумерация произведена в направлении, обратном ходу часовой стрелки. Поскольку приближенное решение $u^h(x, y)$ линейно на $e^{(i)}$, то полностью задается там своими значениями u_j , $j = 1, 2, 3$ в вершинах. Обозначим через $\varphi_j^{(i)}$, $j = 1, 2, 3$ функции формы элемента $e^{(i)}$, т.е. ненулевые сужения базисных функций пространства S_1^h на $e^{(i)}$. Пусть номер j имеет та из них, которая в j -ой вершине имеет отличное от нуля значение, т.е.

$\varphi_j^{(i)}(x_j, y_j) = 1$, где (x_j, y_j) — координаты этой вершины (см. рис. 6). Очевидно, что

$$\varphi_j^{(i)} = \zeta_j, \quad (18)$$

т.е. в рассматриваемом случае функциями формы элемента являются

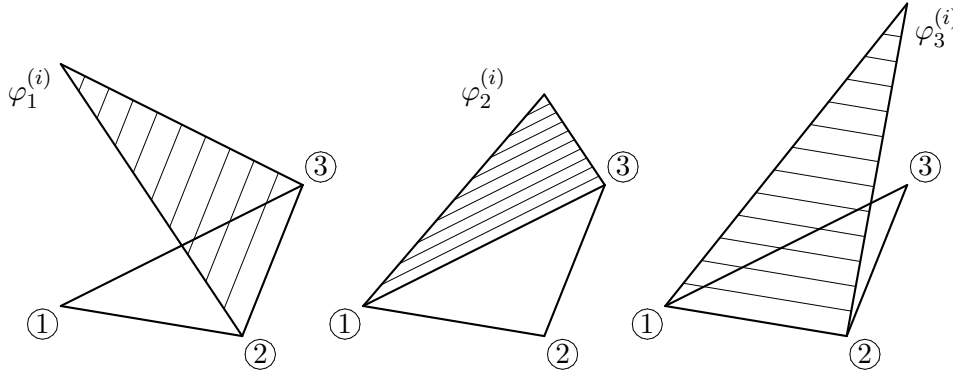


Рис. 6

его барицентрические координаты. Тем самым

$$u^h(x, y) = \sum_{j=1}^3 u_j \varphi_j^{(i)}(x, y) = \sum_{j=1}^3 u_j \zeta_j, \quad (x, y) \in e^{(i)}.$$

Пусть $\mathbf{u}^{(i)} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$ — вектор узловых значений приближенного решения на $e^{(i)}$, а $\Phi^{(i)} = [\varphi_1^{(i)} \quad \varphi_2^{(i)} \quad \varphi_3^{(i)}]$ — матрица функций формы. Тогда

$$u^h(x, y) = \Phi^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}, \quad (x, y) \in e^{(i)}. \quad (19)$$

Представим билинейную (5) и линейную (6) формы в виде

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N a^{(i)}(u, v), \quad l(v) = \sum_{i=1}^N l^{(i)}(v),$$

где

$$a^{(i)}(u, v) = a_1^{(i)}(u, v) + a_2^{(i)}(u, v),$$

а

$$\begin{aligned}
a_1^{(i)}(u, v) &= \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy, \\
a_2^{(i)}(u, v) &= \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy, \\
l^{(i)}(v) &= \int_{e^{(i)}} f v dx dy,
\end{aligned} \tag{20}$$

и подставим u^h из (19) в (20) вместо u , положив одновременно $v = v^h = \Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}$ при $\mathbf{v}^{(i)} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$. Принимая во внимание, что в силу (18), (14)

$$\frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial x} = \frac{a_j}{2S}, \quad \frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial y} = \frac{b_j}{2S},$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
a_1^{(i)}(u^h, v^h) &= \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial v^h}{\partial x} dx dy = \\
&= \int_{e^{(i)}} ([\partial \Phi^{(i)} / \partial x] \mathbf{v}^{(i)})^T ([\partial \Phi^{(i)} / \partial x] \mathbf{u}^{(i)}) dx dy = \\
&= \mathbf{v}^{(i)T} K_1^{(i)} \mathbf{u}^{(i)},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_1^{(i)} &= \int_{e^{(i)}} [\partial \Phi^{(i)} / \partial x]^T [\partial \Phi^{(i)} / \partial x] dx dy = \\
&= \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} a_1/2S \\ a_2/2S \\ a_3/2S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2S & 2S & 2S \end{bmatrix} dx dy = \\
&= \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

— матрица жесткости, отвечающая билинейной форме $a_1^{(i)}(u^h, v^h)$. Аналогично находим

$$K_2^{(i)} = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3^2 \end{bmatrix}$$

— матрицу жесткости, отвечающую билинейной форме $a_2^{(i)}(u^h, v^h)$. Но тогда матрица жесткости треугольного элемента $e^{(i)}$ (матрица жесткости, отвечающая билинейной форме $a^{(i)}(u^h, v^h)$) есть

$$K^{(i)} = K_1^{(i)} + K_2^{(i)} = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 & a_1a_3 + b_1b_3 \\ a_2a_1 + b_2b_1 & a_2^2 + b_2^2 & a_2a_3 + b_2b_3 \\ a_3a_1 + b_3b_1 & a_3a_2 + b_3b_2 & a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Напомним, что S — это площадь треугольника $e^{(i)}$, а a_j и b_j выражаются через коэффициенты вершин треугольника $e^{(i)}$ при помощи соотношений (13), (15).

Далее, полагая, что $f(x, y) = \text{const} = f$ при $(x, y) \in e^{(i)}$, и используя формулу интегрирования (17), имеем

$$l^{(i)}(v^h) = \int_{e^{(i)}} f v^h dx dy = \int_{e^{(i)}} (\Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)})^T f dx dy = \mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)},$$

где

$$\mathbf{F}^{(i)} = \int_{e^{(i)}} f \Phi^{(i)T} dx dy = \frac{Sf}{3} [1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (22)$$

— вектор нагрузки треугольного элемента $e^{(i)}$.

5. Инвариантность матрицы жесткости $K^{(i)}$

Хорошо известно, что оператор Лапласа инвариантен относительно поворота координатной системы и переноса ее начала. Иными словами, оператор Лапласа инвариантен относительно такой линейной замены независимых переменных, которая представляет собой движение плоскости как жесткого целого. Покажем, что построенная нами матрица жесткости $K^{(i)}$, отвечающая оператору Лапласа, также обладает этим свойством

инвариантности, т.е. полностью определяется геометрическими параметрами треугольника $e^{(i)}$ и не зависит от координат его вершин на плоскости Oxy .

Обозначим через l_j длину стороны треугольника $e^{(i)}$, расположенную напротив j -ой вершины, а через θ_j — угол при этой вершине (см. рис. 7). Каждой из сторон треугольника сопоставим коллинеарный ей вектор \mathbf{c}_j , совпадающий с ней по длине и направленный так, как изображено на рис. 7.

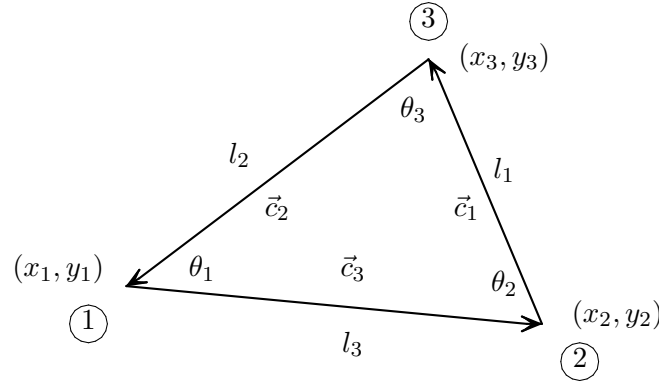


Рис. 7

Очевидно, что указанные векторы суть

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}.$$

С учетом (13), (15) эти векторы принимают вид $\mathbf{c}_j = [b_j \ -a_j]^T$. Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}_j\|^2 &= \mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j = a_j^2 + b_j^2 = l_j^2, \\ \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j &= a_i a_j + b_i b_j = l_i l_j \cos(\pi - \theta_k) = -l_i l_j \cos \theta_k, \quad i \neq k \neq j, \end{aligned}$$

и матрица жесткости (21) принимает вид

$$K^{(i)} = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} l_1^2 & -l_1 l_2 \cos \theta_3 & -l_1 l_3 \cos \theta_2 \\ -l_2 l_1 \cos \theta_3 & l_2^2 & -l_2 l_3 \cos \theta_1 \\ -l_3 l_1 \cos \theta_2 & -l_3 l_2 \cos \theta_1 & l_3^2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как $S = \frac{1}{2}l_i l_j \sin \theta_k$, $i \neq j \neq k \neq i$, а сумма элементов по строке матрицы $K^{(i)}$ равна нулю (см. (16), (21)), то матрицу $K^{(i)}$ можно записать и в следующем виде

$$K^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\operatorname{ctg} \theta_2 + \operatorname{ctg} \theta_3) & -\operatorname{ctg} \theta_3 & -\operatorname{ctg} \theta_2 \\ -\operatorname{ctg} \theta_3 & (\operatorname{ctg} \theta_1 + \operatorname{ctg} \theta_3) & -\operatorname{ctg} \theta_1 \\ -\operatorname{ctg} \theta_2 & -\operatorname{ctg} \theta_1 & (\operatorname{ctg} \theta_1 + \operatorname{ctg} \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если все $\theta_k \leq \pi/2$, т.е. треугольник $e^{(i)}$ не является тупоугольным, то внедиагональные элементы матрицы жесткости (23) неположительны. Если же $e^{(i)}$ остроугольный, т.е. $\theta_k < \pi/2$, то внедиагональные элементы матрицы (23) отрицательны.

6. Упражнения

Введем одномерный аналог барицентрических координат. Пусть $[x_1, x_2]$ — отрезок оси x (см. рис. 8), а $l = \operatorname{mes} [x_1, x_2]$ — его длина. Пусть

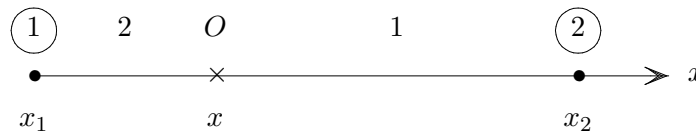


Рис. 8

точка $O \in [x_1, x_2]$ и ее координата есть x . Обозначим через $l_1 = \operatorname{mes} [x, x_2]$ и $l_2 = \operatorname{mes} [x_1, x]$. Тогда барицентрические координаты на $[x_1, x_2]$ суть

$$\zeta_i = l_i/l, \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что

$$l = \frac{1}{1!} \det \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad l_1 = \frac{1}{1!} \det \begin{bmatrix} x_2 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \frac{1}{1!} \det \begin{bmatrix} x & x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Доказать, что

$$\int_{x_1}^{x_2} \zeta_1^m \zeta_2^n dx = l \frac{m!n!1!}{(m+n+1)!}.$$

2. Доказать справедливость формулы (17).

3. Определить барицентрические координаты в тетраэдре и вывести формулу интегрирования одночлена.

Рассмотрим общее линейное эллиптическое уравнение второго порядка

$$-\sum_{m,n=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_n} \left(p_{mn} \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + \sum_{m=1}^2 r_m \frac{\partial u}{\partial x_m} + qu = f, \quad (25)$$

где $[p_{mn}]_1^2$ — симметричная положительно определенная матрица. Вариационная формулировка первой однородной краевой задачи для этого уравнения связана с билинейной формой

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \left(\sum_{m,n=1}^2 p_{mn} \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial v}{\partial x_n} + \sum_{m=1}^2 r_m \frac{\partial u}{\partial x_m} v + quv \right) dx_1 dx_2.$$

4. Построить матрицы жесткости треугольного линейного элемента $e^{(i)}$, связанные с билинейными формами

$$a_{12}^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} p_{12} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1 dx_2,$$

$$a_{21}^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} p_{21} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 dx_2.$$

5. Доказать, что матрица жесткости треугольного линейного элемента $e^{(i)}$, связанная с билинейной формой

$$a_1^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} r_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} v dx_1 dx_2,$$

при $r_1(x, y) = \text{const} = r_1$, $(x, y) \in e^{(i)}$ имеет вид

$$\frac{r_1}{6} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

6. Построить матрицу массы треугольного линейного элемента $e^{(i)}$, т.е. матрицу жесткости, отвечающую билинейной форме

$$a_0^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} quv dx_1 dx_2.$$